УДК 519.85

С.В. ЯКОВЛЕВ[1], К.П. КОРОБЧИНСКИЙ[2]
[1]Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
[2]Харьковский авиационный институт, svsyak7@gmail.com

# МЕТОДЫ ИСКУССТВЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА В ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ ГОМОТЕТИЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

Задачи размещения и упаковки гомотетичных объектов [1–3] имеют как самостоятельный научный интерес, так и большое практическое значение. Этот класс задач обладает рядом специфических особенностей, которые могут быть использованы в процессе оптимизации. В докладе предлагается новый взгляд на формализацию и методы решения задач размещения гомотетичных объектов как задач математического программирования. Обосновывается подход к построению эквивалентной математической модели задачи путем искусственного расширения размерности пространства переменных в исходной постановке.

Рассмотрим задачу размещения геометрических объектов в следующей постановке. Заданы область размещения $S_0$ и объекты $S_1,...,S_n$ фиксированной формы, каждый из которых в пространстве заданной размерности характеризуется своими параметрами размещения $\boldsymbol{p}^i=\left(p_1^i, p_2^i..,p_\alpha^i\right), i\in \boldsymbol{J}_n$, где здесь и далее $\boldsymbol{J}_n=\{1,2,\ldots,n\}$. Параметры размещения задают положение объекта в пространстве. Область размещения $S_0$ характеризуется своими метрическими параметрами $m^0$, задающими, в частности, ее линейные размеры. Зафиксируем положение $S_0$ в пространстве, положив $\boldsymbol{p}^0=(0,0,\ldots,0)$. Объекты $S_i$ с параметрами размещения $\boldsymbol{p}^i$ назовем размещаемыми объектами и обозначим $S_i(\boldsymbol{p}^i)$, $i\in \boldsymbol{J}_n$, а область размещения с метрическими параметрами $\boldsymbol{m}^0=\left(m_1^0,m_2^0,...,m_\beta^0\right)$ обозначим $S_0(\boldsymbol{m}^0)$.

Сформулируем оптимизационную задачу размещения в виде:

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2,.., \boldsymbol{p}^n\right)\to \mathrm{extr} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\chi_{ij}\left(\boldsymbol{p}^i, \boldsymbol{p}^j\right)\ge 0 \quad \forall i,j\in \boldsymbol{J}_n,\ i<j, \tag{2}$$

$$\chi_{i0}\left(\boldsymbol{p}^j, \boldsymbol{m}^0\right)\ge 0, \quad j\in \boldsymbol{J}_n, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{F}(\cdot)$ — целевая функция, характеризующая качество размещения, а неравенства (2), (3) задают соответственно условия взаимного непересечения объектов $S_i(\boldsymbol{p}^i)$ и $S_j(\boldsymbol{p}^j)$, $i,j\in \boldsymbol{J}_n$, и их размещения в области $S_0(\boldsymbol{m}^0)$.

В докладе рассматривается класс задач размещения, в которых размещаемые объекты гомотетичны некоторому объекту $S$. В этом случае каждый объект $S_i$ определяется заданным коэффициентом гомотетии $\lambda_i^0$, $i\in \boldsymbol{J}_n$, и может быть представлен как $\lambda_i^0 S$, $i\in \boldsymbol{J}_n$, а условия попарного непересечения (2) и размещения в области (3) примут вид:

$$\chi_{ij}\left(\boldsymbol{p}^i, \lambda_i^0, \boldsymbol{p}^j, \lambda_j^0\right)\ge 0 \quad \forall i,j\in \boldsymbol{J}_n,\ i<j, \tag{4}$$

$$\chi_{i0}\left(\boldsymbol{p}^j, \lambda_i^0, \boldsymbol{m}^0\right)\ge 0, \quad j\in \boldsymbol{J}_n, \tag{5}$$

где $\lambda_i^0$, $i\in \boldsymbol{J}_n$, — фиксированные значения параметров.

Введем в рассмотрение дополнительные независимые переменные $\lambda_i$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, и сформируем такую систему ограничений, решением которой будут те и только те значения переменных $\lambda_i$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, которые совпадают с исходными фиксированными значениями. Структура решения задается множеством всевозможных перестановок чисел $\lambda_i^0$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, которое обозначим $\boldsymbol{E}(\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_n^0)$. Для аналитического описания множества $\boldsymbol{E}(\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_n^0)$ в пространстве $R^n$ в [4] предложен общий подход и классификация непрерывных представлений евклидовых комбинаторных множеств. Воспользуемся полиэдрально сферическим представлением множества $\boldsymbol{E}(\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_n^0)$. Для этого упорядочим элементы $\lambda_i^0$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, по неубыванию. Не теряя общности, положим $\lambda_1^0 \le \lambda_2^0 \le ... \le \lambda_n^0$ и сформируем систему ограничений

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0, \ \sum_{i \in W} \lambda_i \ge \sum_{i=1}^{|W|} \lambda_i^0, \ \forall W \subset \boldsymbol{J}_n, \ |W| = card\ W, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \tau\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^0 - \tau\right)^2, \ \tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0. \tag{7}$$

В предположении, что коэффициенты гомотетии $\lambda_i$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, — независимые переменные, условия (4), (5) преобразуются к виду:

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}ij\left(\boldsymbol{p}^i, \lambda_i, \boldsymbol{p}^j, \lambda_j\right) \ge 0, \ i \in \boldsymbol{J}_n, \ j \in \boldsymbol{J}_n, \ i < j, \tag{8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{0j}\left(\boldsymbol{p}^j, \lambda_j, \boldsymbol{m}^0\right) \ge 0, \ j \in \boldsymbol{J}_n. \tag{9}$$

Здесь $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{ij}(\cdot)$ — Ф-функция объектов $\lambda_i S(\boldsymbol{p}^i)$ и $\lambda_j S(\boldsymbol{p}^j)$, $i, j \in \boldsymbol{J}_n$, $i < j$, а $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{0j}(\cdot)$ — Ф-функция объектов $\lambda_i S(\boldsymbol{p}^i)$ и $\mathbf{c}S_0(\boldsymbol{m}^0), i \in \boldsymbol{J}_n$, где $\mathbf{c}$ — теоретико-множественная операция дополнения.

Таким образом, исходная задача оптимального размещения гомотопических объектов (1)–(3) размерности $n\alpha + \beta$ в пространстве переменных $p_1^i, p_2^i ..., p_\alpha^i$, $m_1^0, m_2^0, ..., m_\beta^0$ эквивалентно формулируется как оптимизационная задача (1), (6)–(9) размерности $(n+1)\alpha + \beta$ в пространстве переменных $\lambda_i, p_1^i, p_2^i ..., p_\alpha^i, m_1^0, m_2^0, ..., m_\beta^0$, $i \in \boldsymbol{J}_n$. Такой подход для общего случая описан в [5] и назван методом искусственного расширения пространства. Достоинством метода при реализации различных вычислительных схем нелинейной оптимизации является возможность преодолеть область притяжения локальных экстремумов исходной задачи за счет вспомогательных переменных. Этот факт позволяет рассматривать метод искусственного расширения пространства как способ улучшения локальных решений или приближений к ним в задачах размещения геометрических объектов.

В докладе описываются вычислительные аспекты предложенного метода и предложена его иллюстрация при решении класса задач размещения неравных шаров в шаре минимального радиуса с учетом зон запрета на расположение шаров.


1. Hifi M., M’Hallah R. A literature Review on circle and sphere packing problems: Model and methodologies // Advances in Optimization Research. — 2009. — Vol. 2009.
2. M’Hallah R., Alkandari A., Mladenovic N. Packing unit spheres into the smallest sphere using VNS and NLP // Computers and Operations Research. — 2013. — V. 40, N 2. — P. 603–615.
3. Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Yaskov G.N. Packing unequal spheres into various containers // Cybernetics and Systems Analysis. — 2016. — V. 52, N 3. — P. 419–426.
4. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis. — 2016. — V. 52, N 6. — P. 921–930.
5. Yakovlev S.V. The method of artificial space dilation in problems of optimal packing of geometric objects // Cybernetics and Systems Analysis. — 2017. — V. 53, N 5. — P. 725–732.